

周波数フィルターの基礎

Taq TuZino

平成 19 年 2 月 7 日

begun: 2006/平成 18 年 9 月 28 日

updated at: 平成 19 年 2 月 7 日

1 Diagnosis

フィルターというのは一般的には濾過器や篩(ふるい)のことで、ラテン語の *filtrum*(濾過用のフェルト, *felt* は同語源)に由来する。より本質的な定義では、なにかの中から、ある条件に叶うものだけを抽出するための道具をフィルターと云ふ。電気工学・電子工学そして信号数学・情報数学における周波数フィルターは、様々な周波数から構成される信号の中から、ある特定の周波数成分だけを取り出す装置のことである。

なお、フィルターは工学での正書法では「フィルタ」と記述する(カナ書きする外来語は語尾が長音で終わるものであっても「ー」を書かない。例外は日本語にした時¹に2音節以下のものは付ける。例: ルビー)。そのため、本稿でもフィルタと記述する。

2 分類

フィルタは方法論の違いから二種類に分けられる。一つはデータストリームをフーリエ変換して、特定の周波数に対して演算を行い、逆フーリエ変換してデータストリームに復調するもの、もう一つは、フーリエ変換を経由せずに、直接演算を行うものである。後者をコンボリューションと呼ぶ。

また、データストリームが連続量か離散量かによって、フィルタはアナログフィルタとデジタルフィルタに区別できる。

3 用語

通過(帯)域 (passband) フィルタで抽出される信号の周波数帯域。フィルタを通過する帯域。通過帯域の終わりの周波数を通過域端周波数 (passband edge frequency) と呼ぶ。

減衰(帯)域 (stopband) フィルタで除去される信号の周波数帯域。フィルタで減衰させられる帯域。

阻止(帯)域 (stopband) 減衰域に同じ。減衰と云ふと「減って衰へたけど多少はある」ようなニュアンスを含む可能性がある(減衰量/attenuation)ので、通過率0%の場合は、通さないとふ意味の「阻止」を使うほうが望ましい。阻止域の終わりと阻止域端周波数 (stopband edge frequency) と呼ぶ。

¹カナにすることとは日本語にすることである。チームとティームにしたところで英語になるわけではない。

遷移域 (transition band) 通過域と減衰域の間の周波数帯域を遷移域と云ふ。遷移域では応答特性が0以上1未満のでなければいけない。また、応答特性がなだからに0から1に移行することが望ましい。

遮断周波数 (cutoff frequency) 通過帯域と減衰帯域の境界。境界には、常に境界問題(どこを境界にするか)がつきまとう。特に理想フィルタと違い、実際のフィルタでは通過域と減衰域との境界がはっきりしない。端周波数は、それぞれの帯域の終わりと示しているのであって、間に遷移帯が挟在している。一般的には、
遮断周波数は、

$$G = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる周波数を云う。ここでGは利得(ゲイン; gain)である。なぜ $\sqrt{2}$ かという、タネがある。利得はしばしば電圧で示されるが、波動にとって重要なのはエネルギーである。単位時間あたりのエネルギーは電力である。電力は電圧の二乗に比例するから、電力(エネルギー)が半分になる時、電圧は $1/\sqrt{2}$ になる。故に $\sqrt{2}$ なのである。たとえば、Butterworthフィルタのような一次フィルタ(後述)の場合、通過帯域から-3dB減衰した点(dBについては辻野(2006)を参照または自習されたし)で定義される。

中心周波数 (central frequency) Bandpassフィルタにおける通過域(ノッチフィルタの場合は減衰域)の中心の周波数。今、上限の周波数を f_H 、下限の周波数を f_L とすると、中心周波数 f_M は相乗平均(幾何平均)

$$f_M = \sqrt{f_H f_L}$$

で与えられる。音楽や音波のように倍とか桁で取り扱う系つまり、対数でハンドルのする系では、平均と云へば幾何平均である。その理由は、

$$\frac{\log f_H + \log f_L}{2} = \frac{1}{2} \log f_H f_L = \log \sqrt{f_H f_L}$$

となるためである。

選択度 (Q; selectivity) Bandpassフィルタにおける通過域(ノッチフィルタの場合は減衰域)の幅Bと中心周波数 f_M で与えられる数で、

$$Q = \frac{f_m}{B}$$

で定義される。Qが大きいほど幅が狭いということであるから、通過域が狭くなりフィルタで抽出される周波数成分が限定される(つまり選択度が強い)。逆にQが狭いほど幅が広い、ブロードな周波数成分を抽出するフィルタである。 f_M を掛けているのは、同じ幅の広さでも周波数によって、幅の広さのもつ意味が異なるためである。

減衰特性 (attenuation property) 減衰の性質。遷移域でのフィルタ関数の曲線の形状を指すことが多い。ただし、かふいふ曖昧な語はいろいろな使われ方をするので注意が必要である。

減衰度 (attenuation) 減衰域での減衰度合い。減衰域ではまったく信号を遮断する必要はなく、一律低減してもよい。

減衰傾度 (attenuation factor, attenuation slope) 遷移域で利得が減衰する時の傾きを指す。フィルタ特性の傾き。

$$\frac{\Delta G}{\Delta f}$$

で定義できる。ここで f は周波数 (frequency) である。

減衰傾度は dB/oct や dB/dec とふ単位で表わされる。

dB/oct oct は octal(8進数) という意味はなく、オクターブ (octave)²の意である。dB/oct は、減衰傾度を、オクターブすなわち周波数が倍になった時にどれだけ減衰しているかを dB で表わしたものである。

dB/dec dec は decade(十でひとつのユニット) の意で、dB/dec は dB/oct と同様に定義されている。すなわち、周波数が 10 倍になった時にどれだけ減衰しているかを dB で表わしたものである。

dB/oct と dB/dec には対応関係があり、たとえば、Bandpass フィルタのような一次フィルタの場合、20dB/dec は 6dB/oct に等しい。

dB/dec の考へ方は 10 を単位にしていることから、 f を $\log_{10} f$ に変換してハンドルすることを意味している。一方、dB/oct は倍 (2) を単位にしていることから、 f を $\log_2 f$ に変換してハンドルすることを意味している。両者の比をとってやると、

$$\frac{\log_2 f}{\log_{10} f} = \frac{\log_2 10 \log_{10} f}{\log_{10} f} = \log_2 10$$

となる。したがって、dB/oct を dB/dec に変換するには、 $\log_2 10$ を掛けてやればよい。逆に dB/dec を dB/oct に変換するには、 $\log_2 10$ で除してやればよい。ちなみに、 $\log_2 10$ は約 3.321928 である。

次数 (order) 次数理想測定を近似するフィルタ函数の次数。次数が高いほど理想に近い近似である。たとえばデジタルフィルタでは、フィルタは線形差分方程式で表わされる。

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^N b_k x(n-k)$$

ただし、 $x(n)$ は n 番目の入力、 $y(n)$ は n 番目の出力であり、 a_k, b_k は係数である。この式はフィルタ函数を $(n-N)$ までの項の線形結合で表現するものである。この時、 N を無限に延長していけば、理想のフィルタ函数が得られる。もっとも無限に線形結合を繰り返すことは、無限に手間がかかるので、ある程度のところで打ち切る。大体において、4 次が一般的な次数である。

4 フィルタの機能的分類

4.1 Lowpass filter(低域通過フィルタ)

ある周波数を境として、それより低周波のものだけを通過させやうとするフィルタ。対偶をとって、高域阻止フィルタ (highcut filter) と呼ばれることもある。

²オクターブは 8 音階 (ドレミファソラシド) から構成されるので oct (ラテン語で 8 の意、参考: オクトパス)、1 オクターブ上ると周波数は 2 倍にある。たとえば、ヘ音記号の側のラは 440Hz であるが、1 オクターブ上、ドレミファソラシドレミファソラのラ (これをラ' と表記する) は 880Hz である。音楽関係者以外使っていないようなラであるが、ララララ' とすると、時報 (ピッ、ピッ、ピッ、ポーン) になる。

4.2 Highpass filter(高域通過フィルタ)

低域通過フィルタの逆.

4.3 Bandpass filter(帯域フィルタ)

Bandpass filter は低域通過フィルタ (lowpass filter) と高域フィルタ (highpass filter) を組合せて, ある特定の周波数域を通過するフィルタである.

4.4 Bandstop filter(帯域阻止フィルタ)

Bandpass フィルタの lowpass と highpass の組合せを逆にして, ある特定の周波数域のみを阻止するフィルタ. 阻止帯域が狭いものをノッチフィルタ (notch filter) と呼ぶ.

4.5 ノッチフィルタ (notch filter)

Bandstop フィルタの通過帯域が著しく狭いもの. 用途は, たとえば, 信号帯域 (見たい情報が含まれている帯域) が 10-80Hz の時に, 観測器の故障で, AD の 60Hz ノイズが載ってしまった場合に, 60Hz(58-62?) のみを阻止するために用いる.

5 振幅特性によるフィルタの分類

5.1 フィルタ回路の振幅特性 (要約)

Butterworth	通過域がフラットになる.
Bessel	過渡応答 (立ち上がり/立ち下がり) が滑らか.
Tschebyscheff(Chebyshev とも翻字される)	遮断周波数の減衰傾度が大きい (急激な減衰).
連立 Tschebyscheff	更に減衰傾度を大きくできる.

5.2 Butterworth filter

周波数 ω (正確には角速度/角周波数. 真実の周波数は $\omega/2\pi$) に対して次の式を満す振幅特性 (周波数応答) をもつフィルタである (例として Lowpass filter として示す).

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}}$$

ここで, N は次数, ω_c は遮断周波数である. これを Butterworth 特性という. 振幅特性をみてわかることは, 第一に, この関数は通過帯域では平坦になること, 第二に, 次数が高いほど減衰傾度が大きくなる (急激に減衰する) ことが予想される. $\omega = \omega_c$ の時に振幅は $\sqrt{2}$ の減衰を示す. この時の減衰傾度は, $-6 \times N$ dB/oct である.

5.3 Tschebyscheff フィルタ

Tschebyscheff の多項式から求められるフィルタ. アナログ回路で多用される. 理想的なフィルタの応答特性は通過域で減衰 0(100%通過) であつ, 遮断周波数より阻止域では無限大の減衰 (通過率 0%) でなければいけない. しかし, アナログフィルタでは抵抗やコンデンサ, コイルを用いるアナロ

グ回路でフィルタを実装するため、有理関数の形をした伝達関数しか実装できない。したがって、アナログ回路では、理想特性をいかに有理関数で近似するかということがフィルタ設計の要である。有理関数の次数を大きくすると近似の具合は良くなる反面、これを実現する回路は繁雑になっていく。無限次元の回路は思考できても、実現不可能である。ものにはキリがあるので、必要な特性が得られる範囲で次数はなるべく小さく必要がある。このような要請を満足するフィルタの設計方法の一つとして、Tschebyscheff の多項式から求めるフィルタがある。

Tschebyscheff の多項式は、

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1; \\ T_1(x) &= x; \\ T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \end{aligned}$$

の漸化式で示される一連の多項式である。たとえば、

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned}$$

$$T_n(x) \equiv \begin{cases} \cos(n\cos^{-1}x) & (|x| \leq 1), \\ \cosh(ncosh^{-1}x) & (|x| \geq 1). \end{cases}$$

と定義されている。

6 デジタルフィルタ特有の問題

6.1 デジタルフィルタの分類

デジタルフィルタは、非巡回型と巡回型フィルタの二種類に分かれる。

非巡回型フィルタは、インパルス応答が有限長なので、Finite Impulse Response(FIR) フィルタと呼ばれる。巡回型フィルタでは、出力が再度入力される再帰があるため、インパルス応答は無限長になる。故に Infinite Impulse Response(IR) フィルタと呼ばれている。

7 コンボリューション

未稿。

平滑化処理, 微分処理, デコン, 自己相関関数,

中野ほか (1999)

8 参考文献

Camina, A.R. 1984, Mathematics for seismic data. Graham & Trotman, London. ISBN:0860105121/0860105768.

樋口龍雄・川又政征 2000, MATLAB 対応デジタル信号処理. 昭晃堂. 227p. ISBN:4785612010.

貴家仁志 1996, よくわかるデジタル画像処理: フィルタ処理から DCT&ウェーブレットまで. CQ 出版 230p. ISBN:4789836770.

南 茂夫・河田 聡 2002, 科学計測のためのデータ処理入門. CQ 出版. 224p. ISBN:4789836940.

中野宏毅・山本鎮男・吉田靖夫 1999, ウェーブレットによる信号処理と画像処理. 共立出版. 174p.
ISBN:4320085493

小野浩司 1999, シミュレーションで学ぶアナログ&デジタルフィルタ入門. 日刊工業新聞. 268p.
ISBN:4526044814.

辻野 匠 2006, デシベル (decibel) の簡単な解説. <http://staff.aist.go.jp/t-tsjino/doc/decibel/decibe.pdf>
(PDF 版), <http://staff.aist.go.jp/t-tsjino/doc/decibel/decibel/decibe.html> (HTML 版)